Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. UPCT
Titulación: Grado en Ingeniería Química
Asignatura: Matemáticas I
Profesor: Francisco Periago Esparza. Email: f.periago@upct.es

Hoja de Problemas: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden

1. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

$$(a)\ \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-2x=0 \\ x(0)=1 \\ \frac{dx}{dt}(0)=0 \end{cases} \quad (b)\ \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}+6\frac{dx}{dt}+9x=0 \\ x(1)=0 \\ \frac{dx}{dt}(1)=1 \end{cases} \quad (c)\ \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}+9x=0 \\ x(\pi/3)=0 \\ \frac{dx}{dt}(\pi/3)=-1 \end{cases}$$

$$(d)\ \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+2x=0 \\ x(0)=1 \\ \frac{dx}{dt}(0)=0 \end{cases} \quad (e)\ \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-6x=0 \\ x(0)=1 \\ \frac{dx}{dt}(0)=0 \end{cases} \quad (f)\ \begin{cases} 2\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+8x=0 \\ x(0)=1 \\ \frac{dx}{dt}(0)=0 \end{cases}$$

2. Resuelve los siguientes problemas de valor frontera:

$$(a)\ \begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=0 \\ y(0)=2 \\ \lim_{x\to\infty} y(x)=0 \end{cases} \quad (b)\ \begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2}+9y=0 \\ y(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}$$

3. Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones:

(a) $y''-y'-6y=2+3x$ $\quad(b)$ $y''-8y'+16y=1-4x^3$ $\quad(c)$ $y''-y'-6y=2e^{-3x}$

(d) $y''-y'-2y=3e^{-x}$ $\quad(e)$ $y''-8y'+16y=e^{4x}$ $\quad(f)$ $y''-y'-6y=2\cos(3x)$

(g) $y''+4y=3\sin(2x)$ $\quad(h)$ $y''+y=2\cos x$ $\quad(i)$ $y''-2y'=12x-10$

4. Consideremos la siguiente ecuación diferencial para el oscilador armónico sin rozamiento y bajo la acción de una fuerza externa de tipo periódico

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=A\cos(\omega t)$$

donde $\omega_0=\sqrt{k/m}$. La cantidad $\nu_0=\omega_0/2\pi$ se llama frecuencia natural del oscilador. Comprueba que si la frecuencia ω de la fuerza externa se aproxima a ω_0, entonces la amplitud de las oscilaciones tiende a infinito, es decir, demuestra que

$$\lim_{\omega\to\omega_0} x(t)=\infty, \quad t>0.$$

Este fenómeno se conoce con el nombe de *resonancia* y obviamente, debido a la analogía entre el oscilador armónico y el circuito RLC, también se da en este tipo de circuitos eléctricos.

5. Consideremos un circuito RLC con $R=110$, $L=1$, $C=1/1000$, con unidades en el Sistema Internacional, y donde la fuerza electromotriz está dada por

$$E(t)=\begin{cases} 90, & 0\le t<1 \\ 0, & t>1. \end{cases}$$

Calcula la intensidad de corriente $I(t)$ que circula por el circuito, es decir, resuelve el problema

$$\begin{cases} \frac{d^2I}{dt^2}+110\frac{dI}{dt}+1000I=\frac{dE}{dt} \\ I(0)=0 \\ \frac{dI}{dt}(0)=90 \end{cases}$$

6. Consideremos el problema de la Mecánica Cuántica que consiste en estudiar el movimiento de una partícula que se mueve libremente a lo largo del segmento $(0, L)$. Este problema se modeliza matemáticamente por medio del problema de contorno

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi(x), & 0 < x < L \\ \psi(0) = \psi(L) = 0, \end{cases}$$

donde $\hbar = h/2\pi$, con h la constante de Planck, m es la masa de la partícula, E es su energía, y $\psi = \psi(x)$ es la función de onda. Comprueba que los únicos valores de energía para los que el problema anterior tiene una solución no nula son

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8mL^2}, \quad n \geq 1.$$

Este fenómeno se conoce en Mecánica Cuántica como *cuantización de la energía*. Calcula $\psi_n(x)$ teniendo en cuenta que ψ_n son funciones de onda y por tanto $\int_0^L \psi_n^2(x)\,dx = 1$.

7. Calcula los autovalores y autofunciones de los siguientes problemas de contorno, es decir, los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que los siguientes problemas tienen solución no nula:

$$(a)\ \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(1) = 0 \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(-\pi) = X(\pi) \\ X'(-\pi) = X'(\pi) \end{cases}$$

Referencias

[1] E. Steiner, The Chemistry Maths book, Oxford University Press, 1996.

HOJA DE PROBLEMAS : EDO ORDEN 2

(2) a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0;$

$$P(r) = r^2 + r - 2 = 0 \to r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$$

$$2 = y(0) = c_1 + c_2$$

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \lim_{x \to \infty} c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} = 0 \iff c_1 = 0 \to c_2 = 2$$

$$\boxed{\text{Solución}: \quad y(x) = 2e^{-2x}}$$

b) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$

$$P(r) = r^2 + 9 = 0 \iff r^2 = -9 \iff r = \pm 3i$$

$$y(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y(0) = 0 \iff 0 = c_1$$

$$y(\pi) = 0 \iff 0 = c_2 \operatorname{sen}(3\pi)$$

$$\boxed{\text{Solución}: \quad y(x) = c\,\operatorname{sen}(3x) \;.\; c \equiv cte}$$

(3) a) $y'' - y' - 6y = 2 + 3x$

1º) Ecuación homogénea

$$y_h'' - y_h' - 6y_h = 0;$$

$$P(r) = r^2 - r - 6 = 0; \quad r = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 \\ \frac{1-5}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

$$y_h(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$$

2º) Solución particular de la ecuación completa:

$$y_p(x) = a_0 + a_1 x;$$

$$y_p' = a_1$$

$$y_p'' = 0$$

$$y_p'' - y_p' - 6y_p = -a_1 - 6(a_0 + a_1 x) = 2 + 3x;$$

$$-a_1 - 6a_0 - 6a_1 x = 2 + 3x;$$

$$-a_1 - 6a_0 = 2; \quad -6a_0 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}; \quad a_0 = -\frac{5}{12};$$

$$-6a_1 = 3; \rightarrow a_1 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$y_p(x) = -\frac{5}{12} - \frac{1}{2}x$$

Solución general: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$$\boxed{= c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - \frac{5}{12} - \frac{1}{2}x}$$

d) $y'' - y' - 2y = 3e^{-x}$

1º) Ecuación homogénea

$$y_h'' - y_h' - 2y_h = 0$$

$$P(r) = r^2 - r - 2 = 0 \rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

2º) Solución particular de la ecuación completa:

$$y_p(x) = kxe^{-x}$$

$$y_p' = \cancel{k e^{-}}$$

$$y_p' = k e^{-x} - kxe^{-x}$$

$$y_p'' = -ke^{-x} - k(e^{-x} - xe^{-x}) = -2ke^{-x} + kxe^{-x}$$

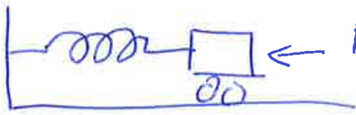
$$y_p'' - y_p' - 2y_p = -2ke^{-x} + \cancel{kxe^{-x}}$$
$$-ke^{-x} + \cancel{kxe^{-x}}$$
$$-\cancel{2kxe^{-x}}$$
$$= 3e^{-x}$$

$$-3k = 3 \to k = -1 \to y_p(x) = -xe^{-x}$$

Solución general: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$$\boxed{= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - xe^{-x}}$$

(4) $$\frac{d^2x}{dt^2} + w_0^2 x = A\cos(wt)$$



F=periódica

1º) Ecuación homogénea

$$P(r) = r^2 + w_0^2 = 0 \to r^2 = -w_0^2 \to r = \pm i w_0$$

$$x_h(t) \equiv y_h(t) = c_1 \cos(w_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(w_0 t)$$

2º) Solución particular de la ecuación completa

$$y_p(t) = c_1 \cos(wt) + c_2 \operatorname{sen}(wt)$$

$$y_p' = -c_1 w \operatorname{sen}(wt) + c_2 w \cos(wt)$$

$$y_p'' = -c_1 w^2 \cos(wt) - c_2 w^2 \operatorname{sen}(wt)$$

$$y_p''(t) + w_0^2 y_p(t) = -c_1 w^2 \cos(wt) - c_2 w^2 \operatorname{sen}(wt)$$

$$\cancel{= A\cos(wt)}$$

$$-\cancel{C}w \qquad + w_0^2 c_1 \cos(wt) + w_0^2 c_2 \operatorname{sen}(wt)$$

$$= A\cos(wt);$$

$$-c_1 w^2 + c_1 w_0^2 = A; \quad \longrightarrow \quad c_1 = \frac{A}{w_0^2 - w^2}$$

$$-c_2 w^2 + c_2 w_0^2 = 0 \longrightarrow c_2 = 0$$

$$x_p(t) \equiv y_p(t) = \frac{A}{w_0^2 - w^2} \cos(wt)$$

Solución general: $\cancel{y(t)}\, x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

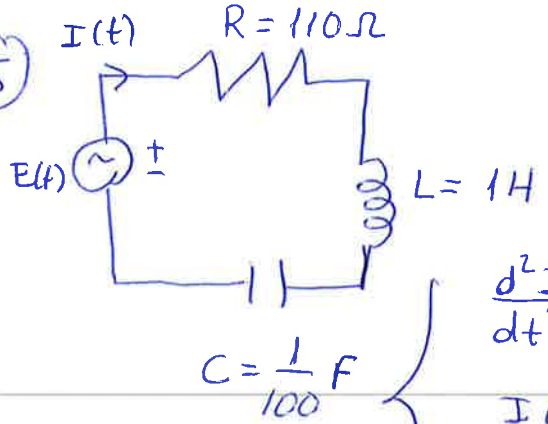
$$= c_1 \cos(w_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(w_0 t)$$

$$+ \frac{A}{w_0^2 - w^2} \cos(wt)$$

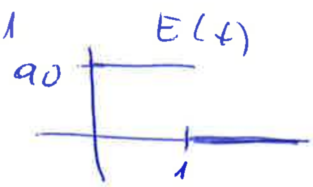
Por tanto,

$$\lim_{w \to w_0} x(t) = \infty \quad \forall\, t > 0.$$

5



$$E(t) = \begin{cases} 90, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dfrac{d^2 I}{dt^2} + 110 \dfrac{dI}{dt} + 1000 I = \dfrac{dE}{dt} \\ I(0) = 0 \\ I'(0) = \frac{1}{L}\left(-RI(0) - \frac{1}{C} Q(0) + E(0)\right) = 90 \end{cases}$$

• Resolvemos el problema en el intervalo $0 \leq t \leq 1$. donde $\frac{dE}{dt} = 0$. Por tanto,

$$\begin{cases} I'' + 110I' + 1000I = 0 \\ I(0) = 0 \\ I'(0) = 90 \end{cases}$$

$$P(r) = r^2 + 110r + 1000 = 0;$$

$$r = \frac{-110 \pm \sqrt{(110)^2 - 4000}}{2} = \begin{cases} -10 \\ -100 \end{cases}$$

$$I(t) = c_1 e^{-10t} + c_2 e^{-100t}$$

$$I'(t) = -10c_1 e^{-10t} - 100c_2 e^{-100t}$$

$$0 = I(0) = c_1 + c_2$$

$$90 = I'(0) = -10c_1 - 100c_2$$

$$\begin{cases} 0 = 10c_1 + 10c_2 \\ 90 = -10c_1 - 100c_2 \end{cases}$$

$$90 = -90c_2 \to c_2 = -1$$

$$c_1 = 1$$

$$\boxed{I(t) = e^{-10t} - e^{-100t}, \quad 0 \leq t \leq 1}$$

• Resolvemos ahora para $t > 1$.

$$\begin{cases} I''(t) + 110I'(t) + 1000I(t) = \frac{dE}{dt} = 0 \\ I(1) = e^{-10} - e^{-100} \\ I'(1) = \frac{1}{L}\left(-RI(1) - \frac{1}{C}Q(1) + E(1)\right) \end{cases}$$

$$Q(1) - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{Q(0)}} = \int_0^1 I(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(e^{-10t} - e^{-100t}\right) dt$$

$$= -\frac{1}{10} e^{-10t} + \frac{1}{100} e^{-100t} \Big]_0^1$$

$$= -\frac{1}{10} e^{-10} + \frac{1}{100} e^{-100} + \frac{1}{10} - \frac{1}{100} \equiv I_1$$

Así,

$$\cancel{I'(1) = -\frac{1}{100} Q(1) = -\frac{1}{100} I_1 - 100}$$

$$I'(1) = -\frac{1}{C} Q(1) = -110 I_1$$

$$I(t) = c_1 e^{-10t} + c_2 e^{-100t}$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{-10} - e^{-100} = I(1) = c_1 e^{-10} + c_2 e^{-100} \\ -110 I_1 = I'(1) = -10 c_1 e^{-10} - 100 c_2 e^{-100} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} c_2 = -1 - e^{100} \\ c_1 = 1 + e^{10} \end{array}$$

$$\boxed{I(t) = (1 + e^{10})\, e^{-10t} - (1 + e^{100})\, e^{-100t}, \quad t > 1}$$

(7)

a) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$

$\boxed{\lambda = 0}$ $P(r) = r^2 = 0 \to r = 0$ raíz doble

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = X(0) = c_1 \\ 0 = X(L) = c_2 L \to c_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow X \equiv 0 \text{ NO}$$

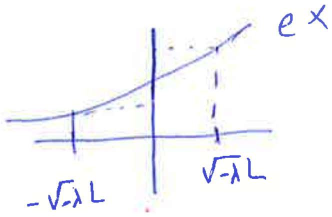
$\boxed{\lambda < 0}$ $P(r) = r^2 + \lambda = 0 \to r^2 = -\lambda > 0 \to r = \pm\sqrt{-\lambda}$

$\cancel{X(x) = c_1 e^{x\sqrt{}}}$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = X(0) = c_1 + c_2 \\ 0 = X(L) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}L} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}L} \end{array}\right\} \to c_1 = -c_2$$

$$0 = c_1 (\underbrace{e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L}}_{\neq 0}) \to c_1 = 0$$



$\to c_2 = 0 \Rightarrow X \equiv 0$ NO

$\boxed{\lambda > 0}$ $P(r) = r^2 + \lambda = 0 \to r^2 = -\lambda < 0 \to r = \pm i\sqrt{\lambda}$

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)$$

$0 = X(0) = c_1$

$0 = X(L) = c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) <$
- $c_2 = 0 \} \Rightarrow X \equiv 0$ NO
- $\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}L = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \; n \neq 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \\ X_n(x) = C_n \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi L}{x}\right) \end{array}}$$

(c) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(-\pi) = X(\pi) \\ X'(-\pi) = X'(\pi) \end{cases}$ } condiciones periódicas

$\boxed{\lambda = 0}$ $X''(x) = 0 \to X'(x) = c_1, \Rightarrow X(x) = c_1 + c_2 x$

$X(-\pi) = X(\pi) \Longleftrightarrow \cancel{c_1} - c_2\pi = \cancel{c_1} + c_2\pi$

$0 = 2c_2\pi \Rightarrow c_2 = 0$

$X'(-\pi) = X'(\pi) \Longleftrightarrow c_1 = c_1.$

$X_0(x) = c_1$ autofunción, $c_1 \neq 0$

$\lambda_0 = 0$ autovalor.

$\boxed{\lambda < 0}$ $X''(x) + \lambda X(x) = 0$

$P(r) = r^2 + \lambda = 0 \to r^2 = -\lambda > 0 \to r = \pm\sqrt{-\lambda}$

$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$X(-\pi) = X(\pi) \Longleftrightarrow c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + c_2 e^{+\sqrt{-\lambda}\pi} = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi};$

$(c_1 - c_2) e^{\sqrt{\lambda}\pi} + (c_2 - c_1) e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0$

$X'(x) = c_1\sqrt{-\lambda}\, e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_2\sqrt{-\lambda}\, e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$X'(-\pi) = X'(\pi) \Longleftrightarrow c_1\sqrt{-\lambda}\, e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - c_2\sqrt{-\lambda}\, e^{\sqrt{-\lambda}\pi} = c_1\sqrt{-\lambda}\, e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - c_2\sqrt{-\lambda}\, e^{-\sqrt{-\lambda}\pi};$

$\sqrt{-\lambda}\,(c_1 + c_2) e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - \sqrt{-\lambda}\,(c_1 + c_2) e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0;$

Tenemos el sistema: $c_1 - c_2 = \alpha$, $c_1 + c_2 = \beta$

$e^{\sqrt{\lambda}\pi}\alpha - \beta e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \to \beta = 0$

$e^{\sqrt{\lambda}\pi}\alpha + \alpha e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \to \alpha(e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi}) = 0 \to \alpha = 0$

$\left.\begin{array}{l} c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$ NO

$\boxed{\lambda > 0}$ $X''(x) + \lambda X(x) = 0;$

$P(r) = r^2 + \lambda = 0 \to r^2 = -\lambda < 0 \to r = \pm i\sqrt{\lambda}$

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, x)$$

$$X'(x) = -c_1\sqrt{\lambda} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\, x)$$

$X(-\pi) = X(\pi) \iff c_1\cos(\sqrt{\lambda}\pi) - c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) =$

$= c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\pi) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi);$

$2c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \begin{cases} c_2 = 0 \\ \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \end{cases}$

$\downarrow$

$\sqrt{\lambda}\pi = n\pi;$

$\lambda_n = n^2, \ n = 1, 2, \ldots$

$X'(-\pi) = X'(\pi);$

$+c_1\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) + \cancel{c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\pi)} = -c_1\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) + \cancel{c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}$

$2c_1\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \begin{cases} c_1 = 0 \\ \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \to \sqrt{\lambda}\pi = n\pi; \ \lambda_n = n^2, \end{cases}$

$n = 1, 2, \ldots$

Autovalores		Autofunciones
$\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$		$X_n^1(x) = \cos(nx)$
		$X_n^2(x) = \operatorname{sen}(nx)$
$\lambda = 0$	$\longrightarrow$	$X_0(x) = 1$